MATEMATIČKA LOGIKA, LOGIČKE OPERACIJE I LOGIČKI IZRAZI

Izjava

Osnovni element logičke algebre je **izjava** ili **sud**. Izjava je tvrdnja za koju se može utvrditi da li je **istinita** ili **lažna**.

Primjeri izjava su: "Hrvatska ima najviše stanovnika od svih država na svijetu", "2 + 2 = 5"
Primjeri tvrdnji koje nisu izjave:

- "Sutra će biti sunčan dan" (vrijednost istinitosti ove tvrdnje je trenutno nepoznata)
- "Zoran lijepo pjeva" (nije moguće objektivno procijeniti navedeno)

U matematičkoj logici nije nam zanimljiv sadržaj izjave, već vrijednost njene istinitosti. Izjave najčešće označavamo velikim latiničnim slovima: A, B, C, ..., a te simbole nazivamo logičkim varijablama. Vrijednost istinitosti izjave (istina ili laž) označavamo sa:

- **istina** - **T** (engl. true) ili oznakom **1**.
- **laž** - slovom **F** (engl. false) ili oznakom **0**.

Primjeri istinite i lažne izjave: "Glavni grad RH je Zagreb" **(T)** i "Ja volim učiti" **(F)**

Osnovne logičke operacije

Tri su osnovne logičke operacije: **negacija** (NE, NOT), **konjunkcija** (I, AND) i **disjunkcija** (ILI, OR). Osnovna pravila za svaku od navedenih operacija prikazat ćemo pomoću tablice istinitosti, u kojima ćemo vrijednost istinitosti označavati sa 1 (istina) i 0 (laž). Prioritet (prednost) u računanju ima operacija negacije, zatim konjunkcije, a operacija disjunkcije je najnižeg prioriteta.

Operacija negacije (NE, NOT)

Operacija negacije je logička operacija koja djeluje na jednu izjavu i mijenja njezinu vrijednost istinitosti. Zato se još naziva i inverzija. Operator negacije označavamo simbolima na dva načina:

- simbol – iznad varijable, npr. $\bar{A}$
- simbolom – ispred varijable, npr. –A

Tablica istinitosti negacije:

A	$\bar{A}$
0	**1**
1	**0**

Operacija konjunkcije (I, AND)

Operacija konjunkcije je logička operacija koja djeluje na dvije izjave. Rezultat operacije će biti istinita izjava ako i samo ako su obje izjave na koje djeluje konjunkcija istinite. Zato operaciju konjunkcije možemo još zvati i logičko množenje. Operator konjunkcije najčešće označavamo simbolom za množenje (A · B), a koriste se i simboli ∧ i ∩.

Tablica istinitosti konjunkcije:

A	B	A·B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Operacija disjunkcije (ILI, OR)

Operacija disjunkcije je logička operacija koja djeluje na dvije izjave. Rezultat operacije će biti istinita izjava ako je barem jedna od polaznih izjava istinita. Operaciju disjunkcije još zovemo i logičko zbrajanje. Operator disjunkcije najčešće označavamo simbolom za zbrajanje (A + B), a koriste se i simboli ∨ i ∪.

Tablica istinitosti disjunkcije:

A	B	A + B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Logički izrazi

Kombinacijom izjava i osnovnih logičkih operacija dobijemo **logički izraz**. Primjerice, kombiniranjem izjave "Ja volim jabuke" i izjave "Ti vološ jabuke" nastaje logički izraz dan u Primjeru 1 (na slici).

Primjer 1.

U navedenom primjeru kombinirali smo dvije izjave i jedan operator (I) u logički izraz. Također, možemo kombinirati više izjava i operatora u jedan logički izraz kao u Primjeru 2 (na slici).

Primjer 2.

Zamijenimo li izjave slovima A, B i C (zbog kraćeg pisanja), a operatore I i ILI matematičkim simbolima za množenje i zbrajanje, tada dobivamo jedan složeni logički izraz (1).

$$\mathbf{A \cdot B + C} \quad \mathbf{(1)}$$

Kombinacijom osnovnih logičkih operacija i izjava, uz korištenje matematičkih operacija i zagrada, uvažavajući pritom prioritete operacija dobit ćemo **složene logičke izraze** koje još nazivamo i **formule algebre sudova**.

Dobivanje tablice istinitosti iz logičkog izraza

Svaki se logički izraz može predočiti tablicom istinitosti. Tablica nam pokazuje ovisnost vrijednosti logičkog izraza o vrijednostima istinitosti izjava od kojih je dobiven. Broj redaka tablice ovisi o broju različitih izjava od kojih je logički izraz sastavljen. Za n različitih logičkih varijabli tablica će imati 2^n redaka (za dvije varijable 4 retka, za 3 varijable 8 redaka, za 4 varijable 16 redaka,...). Kod izrade tablice istinitosti iz logičkog izraza prvo navodimo sve moguće vrijednosti pojedinačnih varijabli od kojih je sastavljen izraz, a zatim postepeno prema prioritetima računanja (negacija, konjunkcija, disjunkcija) popunjavamo tablicu.

Izradit ćemo tablicu istinitosti za logički izraz: $\mathbf{Y = \overline{A \cdot B} + A \cdot \overline{B}}$

Budući da ovaj logički izraz ima dvije varijable A i B, tablica istinitosti će imati četiri retka. Izračunat ćemo redom (po prioritetu računanja) vrijednosti istinitosti za izraze: $A \cdot B$, $\overline{A \cdot B}$, $\overline{B}$, $A \cdot \overline{B}$, a zatim vrijednosti istinitosti za čitav logički izraz.

Tablica istinitosti:

A	B	$A \cdot B$	$\overline{A \cdot B}$	$\overline{B}$	$A \cdot \overline{B}$	$Y = \overline{A \cdot B} + A \cdot \overline{B}$
0	0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0

U sažetom obliku (samo sa vrijednostima istinitosti za konačan logički izraz) tablica istinitosti će izgledati ovako:

A	B	$Y = \overline{A \cdot B} + A \cdot \overline{B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Riješeni primjeri

Primjer 1: Tablica istinitosti za logički izraz **$Y=A\cdot\overline{B}\cdot(A+B)$**

Logički izraz ima dvije varijable A i B, pa će tablica istinitosti imati četiri retka. Izračunat ćemo redom (po prioritetu računanja) vrijednosti istinitosti za izraze: $\overline{B}$, A+B, a zatim vrijednosti istinitosti za čitav logički izraz.

Tablica istinitosti:

A	B	$\overline{B}$	A+B	$Y=A\cdot\overline{B}\cdot(A+B)$
0	0	1	0	0
0	1	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0

A	B	$Y=A\cdot\overline{B}\cdot(A+B)$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

U sažetom obliku (samo sa vrijednostima istinitosti za konačan logički izraz) tablica istinitosti će izgledati kao druga po redu tablica na slici iznad.

Primjer 2: Tablica istinitosti za logički izraz **$Y=\overline{A\cdot B}+\overline{B+\overline{C}}$**

Logički izraz ima tri varijable A, B i C, pa će tablica istinitosti imati osam redaka. Izračunat ćemo redom (po prioritetu računanja) vrijednosti istinitosti za izraze: $A\cdot B$, $\overline{A\cdot B}$, $\overline{C}$, $B+\overline{C}$, $\overline{B+\overline{C}}$, a zatim vrijednosti istinitosti za čitav logički izraz. Tablica istinitosti:

A	B	C	$A\cdot B$	$\overline{A\cdot B}$	$\overline{C}$	$B+\overline{C}$	$\overline{B+\overline{C}}$	$Y=\overline{A\cdot B}+\overline{B+\overline{C}}$
0	0	0	0	1	1	1	0	1
0	0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	0	0	1	0	0

A	B	C	$Y=\overline{A\cdot B}+\overline{B+\overline{C}}$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

U sažetom obliku (samo sa vrijednostima istinitosti za konačan logički izraz) tablica istinitosti će izgledati kao druga po redu tablica na slici iznad.

Zadaci za vježbu

Izradi tablice istinitosti za slijedeće logičke izraze:

1. $Y=A\cdot B+\overline{A+B}$
2. $Y=\overline{\overline{A\cdot B}\cdot\overline{A+B}}$
3. $Y=A\cdot(\overline{B}+\overline{C})$
4. $Y=\overline{A\cdot\overline{B}+C}+(A+\overline{B})\cdot C$
5. $Y=A\cdot B\cdot\overline{C}+\overline{A+\overline{B}}+\overline{\overline{B}\cdot C}$

POJEDNOSTAVLJIVANJE SLOŽENIH LOGIČKIH IZRAZA

Uvod

Kažemo da su dva logička izraza ekvivalentna ukoliko se njihove tablice istinitosti podudaraju u vrijednostima rezultata (tj. ako za bilo koju kombinaciju vrijednosti istinitosti varijabli od kojih je sastavljen i jedan i drugi izraz, kao rezultat daju istu vrijednost istinitosti). Pojednostaviti logički izraz znači zamjeniti ga ekvivalentnim logičkim izrazom koji je jednostavniji od polaznog, tj. ima manje operanada i/ili operatora. To možemo učiniti pomoću različitih postupaka koje jednim imenom zovemo **postupci minimizacije**.

Pravila za pojednostavljivanje

U ljudskoj prirodi je da sve komplicirano i složeno nastojimo pojednostaviti. Tako je i sa složenim logičkim izrazima. Složeni logički izraz možemo promatrati tako da ga raščlanimo na manje dijelove i onda te članove zahvaljujući pravilima Booleove algebre zapišemo jednostavnije. Taj postupak se obično odvija u više koraka i nazivamo ga pojednostavljivanje ili minimizacija logičkog izraza. Pri tom složeni logički izraz zamjenjujemo njemu ekvivalentnim jednostavnijim logičkim izrazom s manje operatora i ulaznih varijabli. Neka pravila pomoću kojih to činimo su nam poznata jer ih koristimo i pri jednostavnim računskim operacijama, a s nekima se do sada vjerojatno nismo sreli.

Komutativnost, asocijativnost i distributivnost

Komutativnost	$A + B = B + A$	$A \bullet B = B \bullet A$
Asocijativnost	$(A + B) + C = A + (B + C)$	$(A \bullet B) \bullet C = A \bullet (B \bullet C)$
Distributivnost	$A \bullet (B + C) = A \bullet B + A \bullet C$	$A + (B \bullet C) = (A + B) \bullet (A + C)$

Za koje osnovne računske operacije vrijede ova gore navedena pravila?

Neutralni element

$$A + 0 = A \qquad A \bullet 1 = A$$
$$A + A = A \qquad A \bullet A = A$$

Izrazi u prvom redu u tablici netralnog elementa vrijede i u svakodnevnom životu, ali bi zato izrazi u drugom redu tablice u svakodnevnom životu bili malo nelogični. No, u matematičkoj logici kako su nam poznate logičke operacije disjunkcije i konjunkcije, odnosno logičko zbrajanje i logičko množenje, možemo pravila dokazati pomoću tablica istinitosti. Tablice istinitosti za pravilo neutralnog elementa:

A	**A+A**
0	**0**
1	**1**

A	**A · A**
0	**0**
1	**1**

Komplementarnost

$$A + \bar{A} = 1 \qquad A \cdot \bar{A} = 0$$

Pravilo komplementarnosti bismo također mogli dokazati tablicama istinitosti:

A	$\bar{A}$	$A+\bar{A}$
0	1	1
1	0	1

A	$\bar{A}$	$A\cdot\bar{A}$
0	1	0
1	0	0

De Morganovi zakoni

Prema britanskom matematičaru Augustusu De Morganu koji se dosta bavio logikom slijedeće dva zakona zovu se De Morganovi zakoni:

$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B} \qquad \overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

Ovi zakoni lako se pamte, a mi ćemo pokušati dokazati da vrijede. Evo tablice istinitosti za zakon u lijevom stupcu:

A	B	A+B	$\overline{A+B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \cdot \overline{B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

Vidimo u sivo sjenčanim stupcima da su izlazne vrijednosti istovjetne i time smo dokazali da zakon vrijedi. Popunite tablicu istine za drugi De Morganov zakon.

A	B	A·B	$\overline{A \cdot B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} + \overline{B}$
0	0					
0	1					
1	0					
1	1					

Idempotentnost negacije ili involutivnost: $\overline{\overline{A}} = A$

Anihilacija: $A + 1 = 1$ $\qquad A \cdot 0 = 0$

Apsorpcija: $A \cdot (A + B) = A$ $\qquad A + A \cdot B = A$

Dok su način djelovanja involutivnosti i anihilacije jednostavni i odmah uočljivi, dotle za apsorpciju ne bi bilo loše načiniti tablice istinitosti.

A	B	A + B	A · (A + B)
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	1	1

Vidimo da u zadnjem stupcu rezultat odgovara stupcu s ulazom A. Ispunite sljedeću tablicu istinitosti i usporedite krajnji rezultat s ulazom A.

A	B	A · B	A + A · B
0	0		
0	1		
1	0		
1	1		

Pojednostavljivanje složenih logičkih izraza

Za početak bi bilo dobro imati pri ruci tablicu s pravilima za pojednostavljenje izraza. Tablicu u pdf formatu možete preuzeti ovdje. Prije nego što krenemo pojednostavljivati izraze moramo se pomiriti s činjenicom da ne postoji univerzalan postupak koji bismo mogli primjeniti na sve izraze. Svaki izraz treba analizirati i uočiti članove izraza na koje bismo mogli primjeniti neko od pravila za pojednostavljivanje.

1. Pokušajmo zajedno na primjeru pojednostavniti izraz: $\overline{\mathbf{A}+\mathbf{B}}\cdot\mathbf{B}+\bar{\mathbf{C}}$

De Morganovo pravilo na prvi član pod negacijom: $\bar{A}\cdot\bar{B}\cdot B+\bar{C}$
Rezultat logičkog množenja B i $\bar{B}$ (komplementarni su) je 0: $\bar{A}\cdot 0+\bar{C}$
Broj pomnožen s 0 jednak je 0, a u log.algebri to isto vrijedi (anihilacija): $0+\bar{C}$
Pravilo neutralnog elementa: $\bar{\mathbf{C}}$

2. Riješimo još jedan primjer: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\cdot(\bar{\mathbf{C}}+\mathbf{A})$

Pravilo distributivnosti (članove prije zagrade množimo sa članovima u zagradi): $A\cdot B\cdot\bar{C}+A\cdot B\cdot A$
Pravilo neutralnog elementa na dio desno: $A\cdot B\cdot\bar{C}+A\cdot B$
Izlučivanje zajedničkih članova A • B (umjesto 3.člana na desnoj strani pisati ćemo 1): $A\cdot B\cdot(\bar{C}+1)$.
Dio izraza u zagradi ostaje 1 (anihilacija): $A\cdot B\cdot 1$.
Pojednostavljeni izraz glasi: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$

Primjeri pojednostavljenja logičkih izraza

Pojednostavi sljedeća tri logička izraza:

$$Y = A\cdot B + A\cdot\overline{B} + A\cdot C + C$$
Rješenje :
$$A\cdot(B+\overline{B}) + A\cdot C + C \;(distribucija)$$
$$A\cdot 1 + A\cdot C + C \;(pravilo\; A+\overline{A}=1)$$
$$A\cdot(1+C) + C \;(distribucija)$$
$$A\cdot 1 + C \;(pravilo\; A+1=1)$$
$$Y = A + C \;\; (pravilo\; A\cdot 1 = A)$$

$$Y = (A+B)\cdot C + (A+D)\cdot C$$
Rješenje :
$$A\cdot C + B\cdot C + A\cdot C + D\cdot C \;(distribucija)$$
$$A\cdot C + A\cdot C + B\cdot C + D\cdot C \;(komutacija)$$
$$A\cdot C + B\cdot C + D\cdot C \;(pravilo\; A+A=A)$$
$$Y = (A+B+D)\cdot C$$

\- ------------------------

$$Y = A\cdot B + A\cdot\overline{B} + A\cdot\overline{C} + B\cdot D$$
Rješenje :
$$A\cdot(B+\overline{B}) + A\cdot\overline{C} + B\cdot D \;(distribucija)$$
$$A\cdot 1 + A\cdot\overline{C} + B\cdot D \;(pravilo\; A+\overline{A}=1)$$
$$A\cdot(1+\overline{C}) + B\cdot D \;(distribucija)$$
$$A\cdot 1 + B\cdot D \;(pravilo\; A+1=1)$$
$$Y = A + B\cdot D \;\; (pravilo\; A\cdot 1 = A)$$

Zadaci za vježbu

Pojednostavi (minimiziraj) sljedeće logičke izraze:

1. $Y = A\cdot B + \overline{A+\overline{B}}$ (rješenje: B)
2. $Y = \overline{\overline{A\cdot B}\cdot(\overline{A}+B)}$ (rješenje: A)
3. $Y = \overline{\overline{A}\cdot B + C} + (A+\overline{B})\cdot C$ (rješenje: $A+\overline{B}$)
4. $Y = A\cdot B\cdot\overline{C} + \overline{A+\overline{B}} + \overline{\overline{B}\cdot C}$ (rješenje: $B+\overline{C}$)